# Moderne Portfoliooptimierung unter Berücksichtigung illiquider Vermögenswerte

Alexander Pajtak*

September 6, 2016

**Abstract**

Die moderne Portfoliotheorie nach Markowitz (1952) beschäftigt sich mit der Selektion und Zusammenstellung von Aktien zu einem optimalen und für den Anleger, nutzenmaximierenden Portfolio. Hierbei werden primär Erwartungswert und Varianz respektive Kovarianz berücksichtigt. Dabei sollen riskante Anlagen so gewichtet werden, dass das idiosynkratische Risiko diversifiziert wird. Es stellt sich aber die Frage, zu welchem Anteil ein Firmeneigentümer sein liquides Vermögen in riskante Anlagen investieren soll, wenn er aufgrund seines Unternehmens bereits implizit risikobehaftet investiert. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung einer optimalen Risikoquote bei gemischter Vermögensstruktur welche sowohl liquides als auch illiquides Vermögen aufweist. Unter der Verwendung der selben Methodologie wie Markowitz, werden beim Optimierungsprozess neben dem gewöhnlichen frei zur Verfügung stehenden Finanzvermögen auch Unternehmensvermögen, Humankapital und Pensionsvermögen berücksichtigt.

**Keywords:** Portfoliooptimierung, Investment & Wealth Management

*KORTEX Konzept GmbH, www.kortex-konzept.de

# 1 Einleitende Motivation

Die Pinoierarbeit von Markowitz (1952) hat die Asset Allokation revolutioniert und in neue Wege geleitet. Die Idee, dass das optimale Zusammenspiel von Erwartungswert und Varianz der Anlagen einen Diversifikationeseffekt hervorruft war bahnbrechend und wurde dementsprechend mit dem Nobelpreis gewürdigt. Eine Anleitung dafür wie das Risiko möglichst breitflächig gestreut werden kann während zugleich ein Renditezuwachs erzielt wird, war das wonach Investoren schon immer gesucht haben. Sind Erwartungswert und Varianz der Anlagen bekannt, können die Vermögensanteile die in die jeweiligen Anlagen investiert werden sollen relative simple berechnet werden. Ausgegangen wird von einem Investor dem sein vollständiges Vermögen zur Verfügung steht. In der Realität hat der Anleger aber nur zu einem Bruchteil seines Vermögens kurzfristig Zugang. Gerade bei Firmeneigentümern besteht ein Großteil des Vermögens aus Unternehmensanteilen. Diese Anteile sind bezüglich ihrer Liquidierbarkeit nicht wie gewöhnliche Aktien anzusehen. Sie stellen somit eine risikoreiche Anlage dar die nicht kurzfristig veräußerbar ist. Auch das Humankapital kann gerade bei jungen Anleger einen signifikanten Teil des Vermögens ausmachen. Williams (1978) berücksichtigt bei der Portfoliooptimierung das Humankapital und dessen Unsicherheit. Ein weiterer Baustein der Vermögensstruktur ist das Pensionsvermögen, welches aufgrund des demografischen Wandels immer mehr an Bedeutung gewinnt. Unter Berücksichtigung dieser etwas komplexeren Vermögensstruktur, senkt das bereits risikoreich investierte Vermögen den Risikoanteil der liquiden Mittel und reflektiert dadurch die Risikotoleranz des Anlegers genauer. Somit entsteht nicht die Gefahr das illiquide Vermögenswert die implizit risikobehaftet investiert sind, ein verstecktes Risiko darstellen.

## 2 Rekapitulation der modernen Portfoliotheorie

In der moderne Portfoliotheorie wird ein Investor betrachtet der über die Dauer von einer Periode sein Vermögen in $N$ Anlagen investieren möchte. Dabei ist das Ziel eines jeden Investors ist eine möglichst hohe Rendite zu erwirtschaften. Da Investoren aber nebst einer hohen Rendite, auch eine gewisse Sicherheit begehren, ist es sinnvoll das Portfolio nicht nur unter dem Gesichtspunkt von Rendite, sondern auch des einhergehenden Risikos zusammenzustellen. Demnach werden bei der Optimierung eines Portfolios sowohl historische Renditen, wie auch Varianz und Korrelation berücksichtigt. Auf Grund dieser Tatsache, wird in der Literatur auch oft von der Mean-Variance-Optimierung gesprochen. Um dieses Optimierungsproblem quantitativ lösen zu können, ist es notwendig den Nutzen des Investors bezüglich dem Zusammenspiel von Rendite und Risiko zu formalisieren. Typischerweise wird hier die folgende Nutzenfunktion angenommen

$$U = \mathbb{E}[R_P] - \frac{\gamma}{2} Var[R_P]. \tag{1}$$

Wobei $\mathbb{E}[R_P]$ den Erwartungswert resp. $Var[R_P]$ die Varianz der Portfoliorendite beschreibt. Die Risikotoleranz des Investors wird mit dem Parameter $\gamma$ eingefangen. Ein hohes $\gamma$ wird demnach mit einem risikoaversen Investor assoziiert. Auf die Bestimmung des $\gamma$ wird hier jedoch nicht weiter eingegangen. Die Bestimmung der Portfoliorendite sowie ihr Erwartungswert und ihre Varianz wird im folgenden detailliert beschrieben.

Sei $V_0$ das Vermögen eines Investors zum gegenwärtigen Zeitpunkt, welches in $N$ Anlagen $(A_1, ..., A_N)$ mit Renditen $(R_1, ..., R_N)$ investiert wird. Dann lässt sich das Vermögen in der nächsten Periode folgendermaßen formalisieren

$$V_1 = A_1(1 + R_1) + ... + A_N(1 + R_N). \tag{2}$$

Für die Portfoliorendite gilt somit

$$R_P = \frac{V_1}{V_0} - 1 = \frac{A_1}{V_0}(1 + R_1) + ... + \frac{A_N}{V_0}(1 + R_N) - 1. \tag{3}$$

Der prozentuale Anteil einer Anlage am Gesamtvermögen wird durch $\frac{A_i}{V_0}$ beschrieben und für alle $i = 1, ..., N$ fortfolgend mit $\omega_i$ substituiert. Durch weiteres Umformen lässt sich die Portfoliorendite in folgende Form bringen

$$R_P = \omega_1 R_1 + ... + \omega_N R_N. \tag{4}$$

Da die Portfoliorendite unbekannt ist werden Erwartungswert und Varianz berechnet. Für den Erwartungswert gilt aufgrund der Liniarität sowie Additivität

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_P] &= \omega_1 \mathbb{E}[R_1] + ... + \omega_N \mathbb{E}[R_N] && (5) \\ &= \omega^\top R. && (6) \end{aligned}$$

Wobei $\omega$ der Vektor der Gewichtungen und $R$ der Vektor der erwarteten Renditen sei.

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[R_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[R_N] \end{bmatrix}$$

Für die Bestimmung der Varianz einer Summe von Zufallsvariablen müssen die Korrelationen zwischen den jeweiligen Anlagen berücksichtigt werden. Eine mögliche Form der Darstellung wäre

$$Var[R_P] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j Cov[R_i, R_j]. \tag{7}$$

Für weiter Berechnungen ist diese Form jedoch ungeeignet. Daher wird auch hier die Vektornotation verwendet.

$$Var[R_P] = \omega^\top \Sigma \omega \tag{8}$$

Mit Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var[R_1] & \cdots & Cov[R_1, R_N] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[R_N, R_1] & \cdots & Var[R_N] \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Da Erwartungswert und Varianz nun bestimmt sind, lassen sich die optimalen Gewichtungen durch das maximieren der Nutzenfunktion bestimmen. Dabei sei es dem Investor erlaubt Leerverkäufe zu tätigen, sowie in eine risikolose Anlage mit Rendite $R_f$ und Gewichtung $\omega_f$ zu investieren. Als Nebenbedingung gilt jedoch, dass die Summe der Gewichtungen 1 ergeben soll. Formal bedeutet das

$$\omega^\top \mathbf{1} + \omega_f = 1, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Damit lässt sich das Optimierungsproblem nun in folgender Weise darstellen

$$\max_{\omega} U = R_f \omega_f + \omega^\top R - \frac{\gamma}{2} \omega^\top \Sigma \omega \quad \text{NB} : \omega^\top \mathbf{1} + \omega_f = 1. \tag{11}$$

Durch einsetzen der Nebenbedingung in die zu maximierende Nutzenfunktion, lässt sich das Problem vereinfachen.

$$\max_{\omega} U = R_f + \omega^\top (R - R_f \mathbf{1}) - \frac{\gamma}{2} \omega^\top \Sigma \omega \tag{12}$$

Für die Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gleichgesetzt.

$$\frac{\partial U}{\partial \omega} = (R - R_f \mathbf{1}) - \gamma \omega^\top \Sigma \omega \stackrel{!}{=} 0 \tag{13}$$

Somit gilt für die optimale Gewichtung der Anlagen

$$\omega = \Sigma^{-1} \frac{R - R_f \mathbf{1}}{\gamma}, \quad \omega_f = 1 - \left( \Sigma^{-1} \frac{R - R_f \mathbf{1}}{\gamma} \right)^\top \mathbf{1}. \tag{14}$$

# 3 Portfoliooptimierung mit illiquidem Vermögen

## 3.1 Grundkonzept

Wie in Kapitel 2 beschrieben, ist es durch den Mean-Variance-Ansatz möglich die optimalen Gewichtungen für ein Investmentbetrag $V$ in $N$ riskante Anlagen und eine weiter risikolose Anlage zu bestimmen. Hierbei wird angenommen, dass das Gesamtvermögen in Höhe von $V$ in liquider Form zur Verfügung steht und vollständig investiert wird. Es sei aber nun ein Teil des Vermögens bereits in riskante Anlagen investiert und nicht kurzfristig liquidierbar. Wie hoch ist in diesem Fall der Anteil am liquiden Vermögen welcher noch in riskante Anlagen investiert werden kann, ohne die Risikotoleranz des Investors zu überschreiten. Hierzu soll zunächst eine vereinfachtes Beispiel den Grundgedanken verdeutlichen.

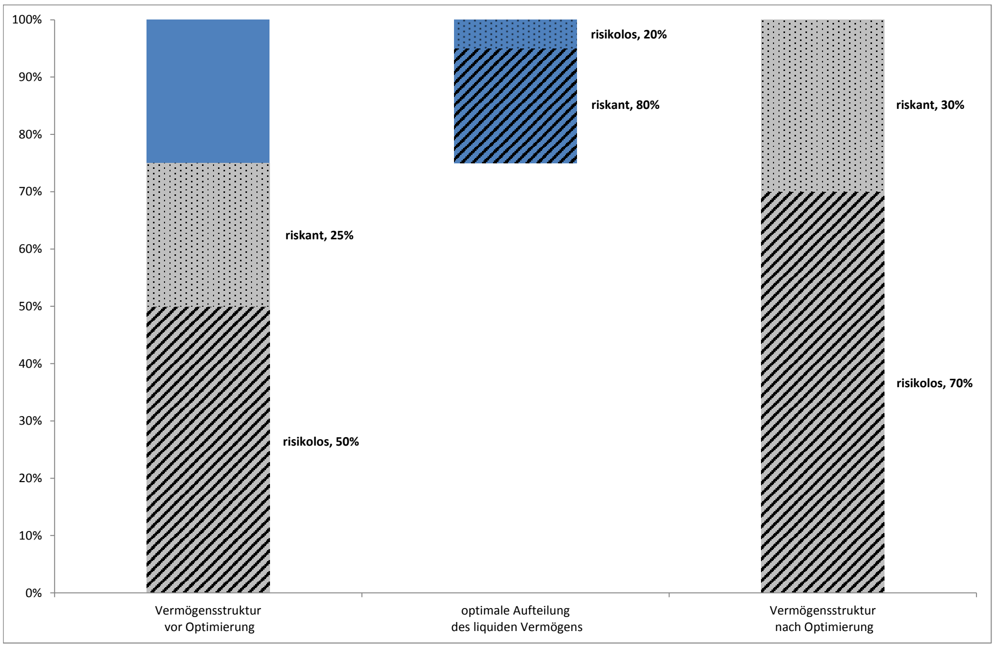


Figure 1: **Vermögenstruktur**

*Die Abbildung zeigt die Vermögensstruktur vor und nach der Optimierung. Blau (Grau) eingefärbte Bereiche stellen (illiquides) liquides Vermögen dar. Schraffierte (Gepünkelte) Bereiche stellen risikolos (riskant) angelegtes Vermögen dar.*

Abbildung 3.1 stellt die Vermögensstruktur eines Investor dar, welche zunächst aus 25% liquiden und 75% illiquiden Mitteln besteht. Desweiteren teilen sich die illiquiden Mittel in $\frac{2}{3}$ risikolos und $\frac{1}{3}$ risikobehaftete Anlagen auf. Würde nun die Portfoliooptimierung einen Risikoanteil von 30% vom Gesamtvermögen vorschlagen, müsste der Investor weitere 5% seines Gesamtvermögens in riskante Vermögenswerte investieren. Da dem Investor jedoch nur 25% seines Vermögens für ein Investment zur Verfügung stehen, bedeutet das, dass er 20% seines liquiden Vermögens riskant investieren muss, um das optimale Portfolio (30% riskant, 70% risikolos) abzubilden. Im ersten Schritt des Optimierungsprozesses wird also zunächst ermittelt wie hoch der optimale Risikoanteil des Gesamtvermögens ist, unabhängig davon ob bereits in riskante Anlangen investiert wurde oder nicht. Erst im zweiten Schritt wird der Risikoanteil auf das liquide Vermögen bezogen, um so die optimale ausstehende Risikoquote zu bestimmen.

## 3.2 Optimaler Risikoanteil an der Vermögenstruktur

Das gesamte Vermögen sei gegeben durch die Summe aller liquiden und illiquiden Vermögenswerte

$$V = V_L + V_{IL}. \tag{15}$$

Wobei $V_L$ das liquide und $V_{IL}$ das illiquide Vermögen, welches weiterführend als Finanzvermögen bezeichnet wird, beschreibt. Im Gegensatz zu Kapitel 2, wo der Investor sein vollständiges Vermögen in das Portfolio investiert und somit die optimalen Gewichtungen der einzelnen Anlagen des Portfolios ermittelt werden mussten, wird jetzt angenommen, dass die Zusammenstellung des Portfolios bereits existiert. Demnach soll also entschieden werden welcher Anteil des liquiden Vermögens in das risikobehaftete Portfolio bzw. in die risikolose Anlage investiert werden soll, unter der Berücksichtigung, dass ein Teil des illiquiden Vermögens bereits in riskante Anlagen investiert ist. Bei dem risikobehafteten Portfolio kann es sich beispielsweise um einen Index und bei der risikolosen Anlage um Staatsanleihen handeln. In Anlehnung an Basler (2002) besteht das illiquide

Vermögen aus Unternehmensvermögen, Humankapital abzüglich der Lebenshaltungskosten und Pensionsvermögen. Hierbei kann z.B. von einem Firmeneigentümer ausgegangen werden, dessen Unternehmen kurzfristig nicht veräußerbar ist. Das Unternehmensvermögen stellt somit eine langfristige risikobehaftete Anlage dar. Da das Humankapital in diesem Fall stark mit dem Unternehmensvermögen korreliert, weist es die selben Eigenschaften auf. Das Humankapital abzüglich der Lebenshaltungskosten (Barwert aller zukünftigen Lebenshaltungskosten) wird als Nettohumankapital definiert. Bei dem Pensionsvermögen soll es sich z.B. um ein Investment in ein Pensionsfonds handeln. Das Nettovermögen zum gegenwertigen Zeitpunkt lässt sich demzufolge folgendermaßen beschreiben

$$V_0 = F_0 + U_0 + H_0 - L_0 + P_0. \tag{16}$$

Wobei mit $F \triangleq$ Finanzanlage, $U \triangleq$ Unternehmensvermögen, $H \triangleq$ Humankapital, $L \triangleq$ Lebenshaltungskosten und $P \triangleq$ Pensionsvermögen bezeichnet wird. Parallel zu Gleichung (2) soll die Entwicklung des Vermögens in der nächsten Periode modelliert werden. Somit gilt

$$\begin{aligned} V_1 = &F_0 \left[(1-\alpha)(1+R_f) + \alpha(1+R_I)\right] + U_0(1+R_U) \\ &+ H_0(1-R_H) - L_0(1+R_L) + P_0 \left[(1+\lambda)(1+R_f) + \lambda R_I\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Das Finanzvermögen $F_0$ wird mit dem Anteil $\alpha$ in einen Index mit Rendite $R_I$ und in eine risikolose Anlage mit dem Anteil $(1-\alpha)$ und Rendite $R_f$ investiert. Für das Pensionsvermögen wird angenommen, dass es ebenfalls in den Index investiert wird. Jedoch mit einer anderen Gewichtung als beim Finanzvermögen. Im Gegensatz zu $\alpha$ kann aber auf das $\lambda$ kein Einfluss genommen werden. Wie schon erwähnt, kann es sich hierbei um einen Pensionsfonds handeln, was zufolge hat, dass die Aufteilung zwischen riskanten und risikolosen Anlagen vom Fondsmanager bestimmt wird. Mit $R_U$ wir die Eigenkapitalrendite des Unternehmens beschrieben.

Da das Vermögen zum gegenwärtigen und zukünftigen Zeitpunkt nun modelliert wurde, soll im nächsten Schritt die Rendite, sowie ihr Erwartungswert und ihre

Varianz bestimmt werden. Das Vorgehen is hierbei identisch zu Kapitel 2.

Für die Vermögensrendite gilt

$$\begin{aligned} R_V = & \omega_F \left[(1-\alpha)(1+R_f) + \alpha(1+R_I)\right] + \omega_U(1+R_U) \\ & + \omega_H(1-R_H) - \omega_L(1+R_L) + \omega_P \left[(1+\lambda)(1+R_f) + \lambda R_I\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Wobei $\omega_F, \omega_U, \omega_H, \omega_L, \omega_P$ Gewichtungen sind.

Durch einfaches Umstellen der Gleichung (18) lässt sich die Vermögensrendite auch folgendermaßen darstellen

$$\begin{aligned} R_V &= [\omega_F(1-\alpha) + \omega_P(1-\lambda)]R_f + [\omega_F\alpha + \omega_P\lambda]R_I \\ &+ \omega_U R_U + \omega_H R_H - \omega_L R_L. \end{aligned} \tag{19}$$

Für den Erwartungswert gilt somit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R]_V &= [\omega_F(1-\alpha) + \omega_P(1-\lambda)]R_f + [\omega_F\alpha + \omega_P\lambda]\mathbb{E}[R_I] \\ &+ \omega_U\mathbb{E}[R_U] + \omega_H\mathbb{E}[R_H] - \omega_L\mathbb{E}[R_L] \\ &= [\omega_F(1-\alpha) + \omega_P(1-\lambda)]R_f + \psi^\top R. \end{aligned} \tag{20}$$

Mit

$$\psi = \begin{bmatrix} \omega_F\alpha + \omega_P\lambda \\ \omega_U \\ \omega_H \\ -\omega_L \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[R_I] \\ \mathbb{E}[R_U] \\ \mathbb{E}[R_H] \\ \mathbb{E}[R_L] \end{bmatrix}$$

Unter Verwendung des Vektors $\psi$ wird die Varianz der Vermögensrendite beschrieben durch

$$Var[R_P] = \psi^\top \Sigma \psi. \tag{21}$$

Wobei mit $\Sigma$ die Varianz-Kovarianz-Matrix der Renditen der riskanten Anlagen bezeichnet wird.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var[R_I] & Cov[R_I, R_U] & Cov[R_I, R_H] & 0 \\ Cov[R_U, R_I] & Var[R_U] & Cov[R_U, R_H] & 0 \\ Cov[R_H, R_I] & Cov[R_H, R_U] & Var[R_H] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Var[R_L] \end{bmatrix} \tag{22}$$

Es wird angenommen, dass die Anlagen untereinander korrelieren, jedoch nicht mit den Lebenshaltungskosten. Diese Annahme macht Sinn, wenn davon ausgegangen wird, dass der Index das Marktportfolio widerspiegelt und zum einen mit der Eigenkapitalrendite $R_U$, zum anderen mit dem Wachstum des Humankapitals $R_H$ in Verbindung steht. Diese Annahmen lassen sich durch ein lineares Modell formalisieren. Für die Eigenkapitalrendite gilt damit

$$R_U = \theta_U + \beta_U R_I + \epsilon_U, \tag{23}$$

respektive für die Rendite des Humankapitals

$$R_H = \theta_H + \beta_U R_I + \epsilon_U. \tag{24}$$

Um den optimalen Risikoanteil $\alpha$ zu bestimmen wird die selbe Nutzenfunktion maximiert wie auch schon in Kapitel 2. Damit folgt für das Optimierungsproblem

$$\max_{\alpha} U = [\omega_F(1-\alpha) + \omega_P(1-\lambda)]R_f + \psi^\top R - \frac{\gamma}{2}\psi^\top \Sigma \psi \tag{25}$$

$U$ wird nach $\alpha$ abgeleitet und gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha} = & -\omega_F R_f + \omega_F \mathbb{E}[R_I] - \gamma\big((\omega_F\alpha + \omega_P\lambda)\omega_F Var[R_I] \\ & + \omega_F\omega_U Cov[R_I, R_U] + \omega_F\omega_H Cov[R_I, R_H]\big) \overset{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Nach $\alpha$ aufgelöst ergibt sich somit für den optimalen Risikoanteil

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}[R_I] - R_f}{Var[R_I]} \frac{1}{\gamma \omega_F} - \left( \lambda \frac{\omega_P}{\omega_F} + \frac{Cov[R_I, R_U]}{Var[R_I]} \frac{\omega_U}{\omega_F} + \frac{Cov[R_I, R_H]}{Var[R_I]} \frac{\omega_H}{\omega_F} \right). \tag{27}$$

$\frac{\mathbb{E}[R_I]-R_f}{Var[R_I]}$ wird in der Literatur als Sharpe-Ratio (SR) bezeichnet und gibt an wie hoch die Risikoprämie beträgt, falls der Investor sich entscheidet etwas mehr in riskante Anlagen, in dem Fall in den Index, zu investieren. Korrigiert wir die Sharpe-Ratio um die Risikotoleranz $\gamma$. Des Weiteren stellt $\frac{Cov[R_I,R_U]}{Var[R_I]}$ bzw. $\frac{Cov[R_I,R_H]}{Var[R_I]}$ das berühmte Beta dar. Wie aus den Gleichungen (23) und (24) entnommen werden kann müssen die beiden Betas identisch sein und werden daher einfachheitshalber mit $\beta$ bezeichnet. Damit lässt sich $\alpha$ folgendermaßen umformulieren

$$\alpha = \frac{1}{\omega_F} \left[ \frac{SR}{\gamma} - \big( \lambda \omega_P + \beta(\omega_U + \omega_H) \big) \right]. \tag{28}$$

Es wird also zunächst unter Berücksichtigung der Risikotoleranz des Anlegers, der optimale risikobehaftete Anteil $\frac{SR}{\gamma}$ am Gesamtvermögen bestimmt. Davon werden alle bereits implizit investierten risikoreichen Anteile $(\lambda \omega_P + \beta(\omega_U + \omega_H)$ abgezogen. Um dann im letzten Schritt den Risikoanteil auf den Anteil des Finanzvermögens $\omega_F$ am Gesamtvermögen zu beziehen.

# 4 Konklusion

Die moderne Portfoliooptimierung liefert eine relativ simple, zugleich aber auch effektive Methode das Portfolio eines Investor an seine persönliche Risikopräferenz anzupassen. Leider scheitert das Modell bei der Bestimmung einer optimalen Aktienquote für einen Investor mit partiell illiquider Vermögensstruktur. Das erweiterte Modell, welches in dieser Arbeit präsentiert wurde, lässt zu, dass auch illiquide Vermögenswerte beim Optimierungsprozess berücksichtigt werden und dadurch eine realistischere Darstellung der Vermögensstruktur entsteht. Das Optimierungsergebnis bei Vernachlässigung risikobehafteter illiquider Vermögenswerte, könnte falsche Implikationen hervorrufen und den Anleger dazu verleiten einen Risikoanteil zu halten der seine Risikotoleranz überschreitet. Eine realitätsnahe Modellierung der Vermögensstruktur, sowie die Berücksichtigung von Korrelationen, erlaubt es die Risikoquote des liquiden Vermögens möglichst nahe den Präferenzen des Vermögenden abzubilden. Sensitivitätsanalysen könnten in weiteren Arbeiten mehr Aufschluss über die Einwirkung der Veränderung in der Vermögensstruktur auf die Aktienquote geben, um somit auch die Vermögensstruktur an sich nachhaltig zu optimieren.

# 5 Referenzen


Basler, S. K. (2002). Vermögensplanung für Unternehmer, 139-190.

Grossman, S. J., & Laroque, G. (1987). Asset pricing and optimal portfolio choice in the presence of illiquid durable consumption goods. *Econometrica*, 58(1), S. 25-51.

Heaton, J., & Lucas, D. (2000). Portfolio choice and asset prices: The importance of entrepreneurial risk. *The journal of finance*, 55(3), 1163-1198.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.

Spremann, K (1995). Asset-Allocation im Lebenszyklus und Vintage-Programm. *Private Banking*, 115-146.

Williams, J. T. (1978). Risk, human capital, and the investor's portfolio. *Journal of Business*, 65-89.